

「底角」という用語使用に関する 論理的考察

A Logical Consideration of the Usage
of the Word “Base Angle”

千 田 直

Sunao SENDA

四 天 王 寺 大 学 紀 要
第 6 7 号 2019年 3 月

(抜刷)

「底角」という用語使用に関する論理的考察

A Logical Consideration of the Usage of the Word “Base Angle”

千 田 直
Sunao SENDA

[要旨]

「底角」は、中学 2 年の図形領域で指導される用語である。この用語の定義は、着目している三角形が二等辺三角形である場合に定義される、いわゆる、“条件付きの定義”である。ところで、この用語の定義が条件付きであるということに起因して、数学教育関係者の間でもしばしば次のような問いが発せられ、時として論争にまで発展してしまう場合もある。

〈問い〉 「2つの底角が等しい三角形は二等辺三角形である」という叙述は、「二等辺三角形の2つの底角は等しい」という命題の逆の表現と考えてもよいのか

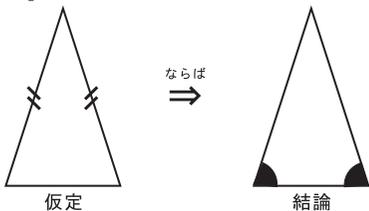
本論文は、論理的な視点から、この問いに対して解答を与えることを目的としたものである。考察の結果、「二値論理を基礎におくユークリッド平面幾何学の体系では、『2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である』という叙述は命題ではないので、もとの命題の逆とはいえない」という知見を得た。

キーワード：底角、条件付きの定義、二値論理、命題、ユークリッド平面幾何学

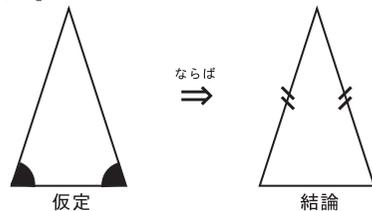
1. 本論文の目的

「底角」は、中学 2 年の図形領域（図形の論証）において指導される用語であるが、その定義は、二等辺三角形という特殊な三角形に対して行われる、いわゆる、“条件付きの定義¹⁾”である。そして、この用語の定義のあと、内容的には【図 1】で示されるような「二等辺三角形の性質」と【図 2】で示されるような「二等辺三角形になるための条件」が指導される。

【図 1】



【図 2】



【図 1】と【図 2】は、互いに逆命題としての意味内容を持っているが、現在使用されている中学 2 年生用の検定教科書²⁾の多くは、これらの主張内容の日常言語表現³⁾として、次

の叙述を採用している⁴⁾。

【図1】：「二等辺三角形の2つの底角は等しい」 …… [表現▲]

【図2】：「2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である」 …… [表現▽]

ところで、【図2】で示される主張内容の表現に関しては、「底角」の定義が条件つきであるということに起因して、数学教育関係者⁵⁾の間でも次のような問いがしばしば発せられ、時として論争にまで発展してしまうことさえある⁶⁾。

<問い>

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」 …… [表現▼]

は、【図2】で示される主張内容を表現したものといえるのか

この<問い>に対する解答を求めて、筆者も長年何人かの数学教育関係者に相談したりいろいろな文献で調べたりもしてみたが、満足のいく結果はいまだに得られていない。確かに、『底角』は条件つきで定義されたものだから、着目している三角形がまだ二等辺三角形であると確定していない段階ではこの用語を使うことはできない」という説明も概ね納得することはできる。しかしそれでは、

二等辺三角形とわかっていない段階でこの用語を使用することでどのような不備が起こってくるのだろうか

といったさらに突っ込んだ問いも生まれてくる。

本論文の目的は、論理的な視点から、上述の<問い>に対し、より根源的な解答を与えようとするものである。

2. 考察をはじめるとの留意事項

中学校2年の図形の論証で指導される図形の性質は、内実“ユークリッド平面幾何学”の公理や定理であるが、1.でも述べたように、本論文は「底角」という用語使用に関する考察であり、ユークリッド平面幾何学の内容を否定するものではない。したがって、考察を進めるにあたっては、ユークリッド平面幾何学で成り立つ命題の内容（例えば、【図1】や【図2】で示される内容）はすべて正しいものとしてよい。また、これらの内容を表現する日常言語による叙述のうち「底角」という用語を含まない叙述についても、その意味する内容がはっきりしているならば考察することなしに認めてよい。さらに、我々はふだん「二等辺三角形の2つの底角は等しい」や「2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」の意味する内容について考えるとき、予め三角形の3頂点が共線的でないこと、言いかえれば、三角形が我々の思い描く、期待通りの図形であるというイメージを持っている。この思考的事実にしたがって、本論文でも、三角形の頂点にあたる3点が共線的でない状態ですでに与えられており、したがって、我々の期待通りの三角形も与えられているという前提で考察をはじめることとする。

3. 考察の方法

本論文では、日常言語の使用に起因する、無意識的な拡大解釈や意味内容の不明瞭さを生じ

させないように配慮しなければならないと考える。そのため、考察にあたっては次の方法をとることとする。

- (1) ユークリッド平面幾何学を1つの集合の中で展開する立場⁷⁾をとる。
- (2) 本論文に關係する幾何学的対象(平面, 点, 直線, 線分, 半直線, 角, 三角形)はすべて記号化し, 対象間の諸關係についても集合論の關係記号(=, ∈, ⊂など)を用いて簡潔に表す。
- (3) 考察の鍵となる主張内容については, 論理記号
 \wedge (かつ), \vee (または), \rightarrow (ならば), \Leftrightarrow (必要かつ十分), \neg (でない),
 さらに必要に応じて, \forall (任意の), \exists (存在する), $\exists!$ (唯一つ存在する)
 を用いて式で表すことによりその意味を明確にする。その上で, 式に対応する日常言語表現を確定させる。
- (4) 「底角」を記号化し, 定義式⁸⁾による意味づけを行う。
- (5) (4) で定義した「底角」が我々のイメージ通りの特徴を備えているのかを考察する。
- (6) 最後に, 1. の〈問い〉で述べた日常言語表現 [表現▼] の式による意味づけを行い, それが【図2】で示される主張内容を表現したものといえるのかについて考察する。

4. 幾何学的対象の記号化および対象間の關係の式化

この章では, 本論文に關係する幾何学的対象の記号化と対象間の諸關係の式化を行う。

(1) 幾何学的対象の記号化

① 基本的な対象⁹⁾

- ・平面 … P
- ・点 … アルファベットの太文字 A, B, C 等で表す
- ・直線 … アルファベットの太文字 l, m, n 等で表す

② ①をもとにその概念が定義される対象

- ・直線 AB : A, B が異なる2点であるときの, A, B を通る唯一の直線
 … \overline{AB} と表す ($\overline{AB} = \overline{BA}$ が成り立つ)
- ・線分 AB : A, B が異なる2点であるときの, \overline{AB} 上の点のうち, A, B , および, A と B の間に
 ある点全体の集合
 … \overline{AB} と表す ($\overline{AB} = \overline{BA}$ が成り立つ)
- ・半直線 AB : A, B が異なる2点であるときの, \overline{AB} 上の点のうち, A , および, B と同じ側に
 ある点全体の集合
 … \overline{AB} と表す
- ・角 ABC : A, B, C が共線的でない3点であるときの, B を始点とする2本の半直線 \overline{BA} と \overline{BC} の
 和集合
 … $\angle ABC$ と表す ($\angle ABC = \angle CBA$ が成り立つ)

- ・ 三角形 ABC : A, B, C が共線的でない3点であるときの, 3本の線分 \overline{AB} と \overline{BC} と \overline{CA} の和集合
 $\cdots \triangle ABC$ と表す ($\triangle ABC = \triangle ACB = \triangle BAC = \triangle BCA = \triangle CAB = \triangle CBA$ が成り立つ)

なお上記, \overline{AB} の A, B のことを 線分の端点, \overline{AB} の A のことを 半直線の頂点, $\angle ABC$ の B のことを 角の頂点, $\triangle ABC$ の A, B, C のことを 三角形の頂点, $\triangle ABC$ の \overline{AB} と \overline{BC} と \overline{CA} のことを 三角形の辺, $\triangle ABC$ の $\angle ABC$ と $\angle BCA$ と $\angle CAB$ のことを 三角形の内角 あるいは単に 三角形の角 という.

<補足1>

\overline{AB} が, 我々の期待通りの2点 A, B を通る唯一の直線であると考えられるのは, A, B が異なるときに限った話である. 実は, 本考察に現れるほかの概念についても同様のことがいえる. すなわち, \overline{AB} や \overline{AB} も A, B が異なる2点のときに, また, $\angle ABC$ と $\triangle ABC$ は3点 A, B, C が共線的でないときに, 初めて我々の期待通りの図形をさすのである¹⁰⁾. 結局, これらの定義も条件付きの定義であるが, 2. で述べたように, 本論文では, 共線的でない3点 A, B, C がすでに確定しているという前提で考察をはじめている. そして, この前提からは, A, B, C が互いに異なることが導かれるので,

$$\overline{AB}, \overline{AB}, \overline{AB}, \angle ABC, \triangle ABC$$

のすべてが, 我々の期待通りの図形であるといつてよい.

(2) 幾何学的対象間の関係の式化

- ・ A と B は同一の点である $\cdots A = B$ と表す
- ・ \overline{AB} と \overline{CD} は同一の直線である $\cdots \overline{AB} = \overline{CD}$ と表す
 (同様に, 同一の線分, 同一の角などについても「=」を使って表す)
- ・ C は \overline{AB} 上にある (\overline{AB} は C を通る) $\cdots C \in \overline{AB}$ または $\overline{AB} \ni C$ と表す
- ・ \overline{AB} と \overline{CD} は合同である (移動によって互いに重ねられる) $\cdots \overline{AB} \sim \overline{CD}$ と表す
- ・ $\angle ABC$ と $\angle DEF$ は合同である (移動によって互いに重ねられる)
 $\cdots \angle ABC \approx \angle DEF$ と表す

<補足2>

直線 AB と 線分 AB は本来異なる概念であるが, 中学校では, とともに「 AB 」で表し, どちらをさしているかについては文脈によって判断させることになっている. しかし本論文では, 3. に則つてこれらを区別することにした. また中学校では, 線分 AB と 線分 CD が合同である (移動によって互いに重ねられる) ことを「等しい」といい, 等号「=」を使って「 $AB = CD$ 」と表しているが, この使用法も本論文の立場では正しくない. なぜなら, 「=」というのは, 集合として, あるいは元として「等しい」という場合に用いるのであって, 元 (点) が同一のものであるとか部分集合 (直線, 線分, 角, 三角形など) が同一のものであるといった場合にだけその使用が認められる. 一方, 移動によって重ねられる場合の2つの対象は同値関係にある

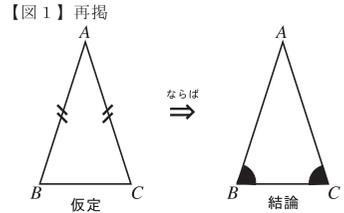
というのが正しい考え方である。そのため、記号「 \sim 」をあてがった。さらに、 $\angle ABC$ と $\angle DEF$ が合同であるという場合も同値関係ではあるが、線分の同値関係とは異なったものであるため、本論文では、「 \approx 」という記号を用いて線分の同値関係と区別した。

5. 考察の鍵となる主張内容の式化

(1) 【図1】で示される主張内容の式化

筆者は、1. の【図1】で示される主張内容を式で明確に表せば、次の式になると考える。

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB^{11)} \dots\dots \text{[意味}\Delta\text{]}$$



この式は、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$\begin{aligned} \overline{AB} \text{ と } \overline{AC} \text{ が合同 (線分の同値関係という意味で等しい) ならば} \\ \angle ABC \text{ と } \angle ACB \text{ は合同である (角の同値関係という意味で等しい)} \end{aligned}$$

ことを表している。

ところで、[意味 Δ]には「底角」という用語に相当する記号は見当たらない。あるのは、「三角形の角」としての $\angle ABC$ と $\angle ACB$ だけである。このことは、本来「底角」という用語は必須のものではないことを示していることに他ならない。確かに、中学校数学の指導場面でも、「辺に対する角」が学習済みであれば【図1】の主張内容の日常言語表現として、

二等辺三角形の等しい2辺に対する角は等しい

という叙述を採用しても立派に意味は通じる¹²⁾。

そこで本論文では、【図1】の示す主張内容の日常言語表現を1.の[表現 \blacktriangle]から下の[表現 Δ]に変更することとする。「底角」が「角」に変わっているところが留意すべき点である。

<約束1>
 本論文では、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB \dots\dots \text{[意味}\Delta\text{]}$$

 の日常言語表現として、次の叙述を採用する。
 「二等辺三角形の2つの角は等しい」…… [表現 Δ]

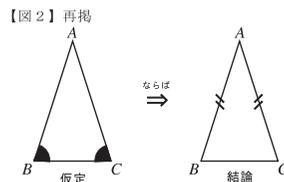
そして、「底角」という用語が含まれていた[表現 \blacktriangle]を日常言語表現にもつ意味内容については、「底角」を記号化したのち、改めて「底角」記号を含む式を用いてその意味づけを行

うこととする。

(2) 【図 2】で示される主張内容の式化

1. の【図 2】で示される主張内容の意味を次の式で定める。

$$\angle ABC \approx \angle ACB \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \quad \dots\dots [\text{意味}\nabla]$$



この式を「ならば文」で表せば、

$$\triangle ABC \text{ において}^{13)}, \angle ABC \approx \angle ACB \text{ ならば } \overline{AB} \sim \overline{AC} \text{ である}$$

となるが、ちょうど中学校の実際の指導場面でも、【図 2】で示される主張内容を

$$\triangle ABC \text{ において, } \angle ABC = \angle ACB \text{ ならば } AB = AC \text{ である}$$

と表現したりするから、筆者は理にかなっていると考える。

<約束 2 >

本論文では、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$\angle ABC \approx \angle ACB \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \quad \dots\dots [\text{意味}\nabla]$$

の日常言語表現として、次の叙述を採用する。

「2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である」… [表現▽]

6. 「底角」の定義

すでに 5. (1) でみたように、[意味△]の中には「底角」に相当する記号はどこにも見当たらなかった。そこで筆者は、「底角」を含む叙述の考察を進めるためには、どうしても「底角」を意味する記号を新たに導入する必要があると考える。この考えに従って、次の新しい記号 $F(A, B, C)$ ¹⁴⁾ を導入する。

【「底角」の当面の定義式】

「底角」に相当する記号 $F(A, B, C)$ を次の式で定義する。

与えられた $\triangle ABC$ に対し、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC$$

この式を「ならば文」で表せば、

$$\triangle ABC \text{ において, } \overline{AB} \sim \overline{AC} \text{ ならば } F(A, B, C) = \angle ABC \text{ である}$$

となるが、次のような日常言語で表現することもできよう。

「 $\triangle ABC$ が二等辺三角形のとき、 $\angle ABC$ を底角（詳言すれば、底角 ABC ）という」

7. 定義した「底角」の適性に関する考察

ここでは、(我々の期待通りの)二等辺三角形が与えられているとき、6. で定義した「底角」が、我々のイメージ通りの特徴を備えているかどうかを考察する。

(1) 【「底角」の当面の定義式】を基礎として導かれることがら

二等辺三角形の両底角の確定性

与えられた $\triangle ABC$ において、次が成り立つ。

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow (F(A, B, C) = \angle ABC \wedge F(A, C, B) = \angle ACB)$$

日常言語訳

$\triangle ABC$ において、 \overline{AB} と \overline{AC} が合同なとき、 $\angle ABC$ のほか $\angle ACB$ も底角である。

[証明]

$$F(A, B, C) \text{ の定義式: } \overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC$$

の中の B と C を入れ換えれば¹⁵⁾、 $\overline{AC} \sim \overline{AB} \rightarrow F(A, C, B) = \angle ACB$

しかるに、線分の同値関係 \sim の対称律 ($\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \overline{AC} \sim \overline{AB}$) により、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, C, B) = \angle ACB$$

ゆえに、与えられた $\triangle ABC$ において、

$\overline{AB} \sim \overline{AC}$ が成り立つとき、

$$F(A, B, C) = \angle ABC \wedge F(A, C, B) = \angle ACB$$

が成り立つ。すなわち、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow (F(A, B, C) = \angle ABC \wedge F(A, C, B) = \angle ACB)$$

[証明終わり]

こうして我々のイメージ通り、

二等辺三角形には底角が2つある

ことが導かれた。

ところで5. (1) の〈約束1〉の [意味△] は、

$\triangle ABC$ が二等辺三角形のとき、 $\angle ABC$ と $\angle ACB$ が合同である ($\angle ABC \approx \angle ACB$)

ことを主張していたが、このことと二等辺三角形の両底角の確定性

から、さらに次のこともわかる。

二等辺三角形の2底角相等と二等辺三角形の2角相等の主張内容の同一性

$\triangle ABC$ が二等辺三角形のとき、底角 ABC と底角 ACB が合同であること

と

$\triangle ABC$ が二等辺三角形のとき、 $\angle ABC$ と $\angle ACB$ が合同であること

は、ユークリッド幾何学において全く同じ主張内容である。

なぜなら,

いま, (共線的でない) 3点 A, B, C について,

$$\overline{AB} \sim \overline{AC}$$

が成り立っているとする. そうすれば,

二等辺三角形の両底角の確定性により, $F(A, B, C) = \angle ABC \wedge F(A, C, B) = \angle ACB$ が成り立つが, このことは, $F(A, B, C)$ と $\angle ABC$, $F(A, C, B)$ と $\angle ACB$ がそれぞれ平面 P の部分集合として同一のものであることを示している. したがって,

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \text{ と } \angle ABC \approx \angle ACB$$

は全く同じ対象についての同じ主張の言いかえにすぎない. すなわち, ユークリッド平面幾何学において, この2つの主張内容は同じのものである. このこともまさに我々のイメージ通りのことがらである.

さらにこの他, $\triangle ABC$ が正三角形の場合にも, 我々のイメージ通りのことがらが導かれる.

正三角形における底角の3点表記に関する同一性

$\triangle ABC$ が正三角形のとき,

底角 ABC と底角 CBA は同一の角である. すなわち,

$$F(A, B, C) = F(C, B, A)$$

[証明]

いま, (共線的でない) 3点 A, B, C について,

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \wedge \overline{CB} \sim \overline{CA}$$

が成り立っているとする. 「底角」の定義 (【「底角」の当面の定義式】) より,

$$F(A, B, C) = \angle ABC \wedge F(C, B, A) = \angle CBA$$

しかるに, $\angle ABC = \angle CBA$ なので,

$$F(A, B, C) = F(C, B, A)$$

[証明終わり]

(2) 「底角」の定義 (【「底角」の当面の定義式】) の適性

筆者は, (1) の考察の結果より, 6. で定義した「底角」が我々のイメージ通りの特徴を備えていると考える.

8. 「底角」を含む日常言語表現の意味づけ

(1) 「二等辺三角形の2つの底角は等しい」の意味づけ

こうして, 5. (1) で予告していた日常言語表現 [表現▲], つまり,

「二等辺三角形の2つの底角は等しい」

の式による意味づけが可能となった。すなわち、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \dots\dots [\text{意味}\blacktriangle]$$

の日常言語表現として、

$$[\text{二等辺三角形の2つの底角は等しい}] \dots\dots [\text{表現}\blacktriangle]$$

を採用することとする。実際、

$$\boxed{\text{二等辺三角形の2底角相等と二等辺三角形の2角相等の主張内容の同一性}}$$

でみたように、(共線的でない) 3点 A, B, C について、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC}$$

が成り立っているとき (与えられた $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるという仮定のもとでは)、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \text{ と } \angle ABC \approx \angle ACB$$

は全く同じ内容を主張している。

つまり、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \dots\dots [\text{意味}\blacktriangle]$$

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB \dots\dots [\text{意味}\blacktriangle]$$

は同じ主張内容にすぎない。ただ、この2つを日常言語で表現したときに「底角」という用語を含んでいるか否かの違いだけである。

$$[\text{二等辺三角形の2つの底角は等しい}] \dots\dots [\text{表現}\blacktriangle]$$

$$[\text{二等辺三角形の2つの角は等しい}] \dots\dots [\text{表現}\blacktriangle]$$

また、[表現△] はユークリッド平面幾何学における真命題 (正しい命題) であり、さらに、[意味△] が [意味△] と同値であることも容易に導くことができるので、[表現△] も真命題ということになる。以上の理由から、筆者は、[表現△] を日常言語表現にもつ意味内容として [意味△] をあてがうのは理に適っていると考える。

<約束3>

本論文では、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \dots\dots [\text{意味}\blacktriangle]$$

の日常言語表現として、次の叙述を採用する。

$$[\text{二等辺三角形の2つの底角は等しい}] \dots\dots [\text{表現}\blacktriangle]$$

(2) 「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」の意味づけ

これまでの考察から、筆者は、日常言語表現：

$$[\text{2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である}] \dots\dots [\text{表現}\blacktriangledown]$$

の意味として、次の [意味▽] を対応させるのが極めて自然であると考えられる。

そして今後は、一応意味づけが完了したこの [表現▽] が【図2】で示される主張内容を表現したものといえるかどうかの考察を行うことにする。

<約束4>

本論文では、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots [\text{意味}\blacktriangledown]$$

の日常言語表現として、次の叙述を採用する。

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」…… [表現 \blacktriangledown]

9. 「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」 ([表現 \blacktriangledown]) の真偽性の考察

(1) 考察の方向性

8. (1) でみたように、

「二等辺三角形の2つの底角は等しい」…… [表現 \blacktriangle]

$$(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \dots\dots [\text{意味}\blacktriangle])$$

と

「二等辺三角形の2つの角は等しい」…… [表現 \triangle]

$$(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB \dots\dots [\text{意味}\triangle])$$

は同じ主張内容にすぎず、そしてこれらはともにユークリッド平面幾何学における真なる命題であった。

ところで、ユークリッド平面幾何学では、

「2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」…… [表現 ∇]

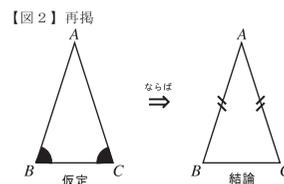
$$(\angle ABC \approx \angle ACB \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots [\text{意味}\nabla])$$

も真なる命題であり、これが1. の【図2】で示される主張内容でもあった。したがって、

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」…… [表現 \blacktriangledown]

$$(F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots [\text{意味}\blacktriangledown])$$

も【図2】で示される主張内容の表現であるといえるためには、最低でもこれは真命題でなければならない。



(2) 用語を定義するための本来の規則

筆者は6. で定義式による「底角」の当面の定義を行ったが、そこでは底角に相当する記号として関数記号 $F(A, B, C)$ を用いた。それは共線的でない3点 A, B, C (我々の期待通りの $\triangle ABC$) が与えられているという前提で、2辺 \overline{AB} と \overline{AC} が合同であれば、底角 ABC も唯一つに決まるという気持ちからであった。ところで、数学基礎論¹⁷⁾では、関数記号の導入規則(内容的には、用語を定義するための規則)というものがきちんと定められている。概要を説明すると、

L (基本となる記号のあつまり) 上の論理式 $P(a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ があって、

公理系 Γ から、任意の対象 x_1, x_2, \dots, x_m に対して、

$$\exists! y P(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \quad \dots \quad (\star)$$

が導かれたとき、

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

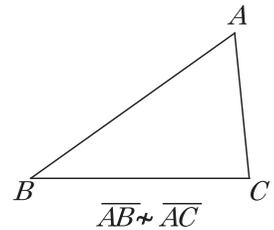
を新しく公理として付加することで、新しい関数記号 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ を導入することができるという規則である。そして、このようにして新しい関数記号を導入したことにより、 L が L' に、 Γ が Γ' に拡張されることになるが、この拡張は非本質的な拡張にすぎないという結果も導かれる。

(3) 「底角」の定義の再考

(2) の規則に従えば、6. で行った「底角」の当面の定義には、規則違反があることがわかる。なぜなら、(2) の (\star) に注目すれば、任意の x_1, \dots, x_m に対して

$$P(x_1, \dots, x_m, y)$$

を満たす唯一の y がつねに存在していなければ関数記号（用語）を導入（定義）することができないわけであるが、6. で定めた「底角」の定義では、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ の場合の「底角」が未定義なために、この場合の (\star) の y に相当するものが存在しないからである。



以上の考察より、関数記号導入規則に違反しない「底角」の定義の型が明らかとなった。

【「底角」の定義の型】

「底角」に相当する記号 $F(A, B, C)$ は、次の型をしていなければならない。
与えられた $\triangle ABC$ に対し、

$$(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} + \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \boxed{\text{ア}})$$

このような場合分けによる定義は、通常、次のように記述される。

$$F(A, B, C) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \angle ABC & (\overline{AB} \sim \overline{AC} \text{ のとき}) \\ \boxed{\text{ア}} & (\overline{AB} + \overline{AC} \text{ のとき}) \end{cases}$$

この定義の型は、先の「底角」の定義（【「底角」の当面の定義式】）を内包している。
実際、与えられた $\triangle ABC$ において、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC}$$

を仮定すれば、

$$F(A, B, C) = \angle ABC$$

が導かれる。それゆえ、7. でその成立を確認した、

二等辺三角形の両底角の確定性

二等辺三角形の2底角相等と二等辺三角形の2角相等の主張内容の同一性

正三角形における底角の3点表記に関する同一性

についても改めて考察し直す必要はない（結果に変更はない）。

それでは、アには何を当てはめれば良いのであろうか。論理的には（数学基礎論によれば）、唯一存在性が確認された任意の対象のうち、ユークリッド平面幾何学の体系に矛盾を生じさせないものなら何でもよいのである¹⁸⁾。本論文の場合、任意の角を選ばうまくユークリッド平面幾何学の体系に溶け込むことができる¹⁹⁾。

(4) 「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」 ([表現▼]) は真なる命題か

(2) および (3) で述べたように、厳格な立場での関数記号の導入についてはあらゆる場合においても、その記号の表す対象を定めなくてはならない。そこで、試みに【「底角」の定義の型】のアにいくつかの角を当てはめ、どんな場合についても、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC}$$

が成り立つのか、すなわち、

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」

は真なる命題であるのかについての考察を行うことにする。その結果、もしも、

反例：

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \text{ であるにもかかわらず } \overline{AB} \neq \overline{AC}$$

つまり、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \wedge \overline{AB} \neq \overline{AC}$$

が導かれるような（共線的でない）3点 A, B, C の配置が確認されれば、その場合は真なる命題とはいえないことになる。

さて本論文で、その唯一の存在性が認められている角は、次の3つである。

$$\angle ABC, \angle ACB, \angle BAC$$

i) $\angle ABC$ を当てはめた場合

定義式は、 $(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} \neq \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC)$ となる。

$\overline{AB} \sim \overline{AC}$ のとき、 $F(A, B, C) = \angle ABC$ なので、

$$F(A, C, B) = \angle ACB^{20)}$$

また、ユークリッド平面幾何学の定理：

二等辺三角形の2つの角は等しい…… [表現△]

$$(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB \text{ …… [意味△]})$$

により、

$$\angle ABC \approx \angle ACB$$

ゆえに、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B)$$

したがって、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AB} \neq \overline{AC}$ のときも、 $F(A, B, C) = \angle ABC$ なので、

$$F(A, C, B) = \angle ACB$$

ただこの場合は、ユークリッド平面幾何学の定理：

2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である…… [表現▽]

$$(\angle ABC \approx \angle ACB \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots \text{[意味▽]})$$

の対偶により、

$$\angle ABC \neq \angle ACB$$

ゆえに、

$$F(A, B, C) \neq F(A, C, B)$$

したがって、

$$\overline{AB} \neq \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \neq F(A, C, B)$$

そして、この対偶をとれば、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots \textcircled{2}$$

つまり、①、②より、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \Leftrightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC}$$

ゆえに、i) の場合は、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots \text{[意味▼]}$$

が成り立つ。

したがって、

$$\text{「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」} \dots\dots \text{[表現▼]}$$

は、

真なる命題

である。

ii) $\angle ACB$ を当てはめた場合

定義式は、 $(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} \neq \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ACB)$

となる。

$\overline{AB} \sim \overline{AC}$ のときは、i) の $\overline{AB} \sim \overline{AC}$ のときと同様の推論を行えば、

$$\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) \approx F(A, C, B)$$

$\overline{AB} \neq \overline{AC}$ のときは、 $F(A, B, C) = \angle ACB$ なので、

$$F(A, C, B) = \angle ABC$$

また、ユークリッド平面幾何学の定理：

2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である…… [表現▽]

$$(\angle ABC \approx \angle ACB \rightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC} \dots\dots [\text{意味}\nabla])$$

の対偶により、

$$\angle ABC \neq \angle ACB$$

さらに、角の同値関係の対称律の対偶により、

$$\angle ACB \neq \angle ABC$$

ゆえに、

$$F(A, B, C) \neq F(A, C, B)$$

あとは、i) の場合と同じ推論を行えば、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \Leftrightarrow \overline{AB} \sim \overline{AC}$$

したがって、ii) の場合も、

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」…… [表現▼]

は、

真なる命題

である。

iii) $\angle BAC$ を当てはめた場合

定義式は、 $(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} + \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle BAC)$ となる。

この場合は、反例が見つかる。

なぜなら、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ のとき、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \text{ であるにもかかわらず } \overline{AB} + \overline{AC}$$

が導かれるからである。

今、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ とすると、 $F(A, B, C) = \angle BAC$ なので、 $F(A, C, B) = \angle CAB$

しかるに、 $\angle BAC = \angle CAB$ なので、 $F(A, B, C) = F(A, C, B)$

ゆえに、角の同値関係の反射律により、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B)$$

以上のことから、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ のときには、

$$F(A, B, C) \approx F(A, C, B) \wedge \overline{AB} + \overline{AC}$$

が導かれることがわかる。

したがって、iii) の場合は、

「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」…… [表現▼]

は、

偽なる命題

である。

10. 「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」([表現▼])は、【図2】で示される主張内容を表現したものといえるか

これより、本論文の本題に入る。9. (4)での考察結果を、筆者は次のようにまとめることができる。と考える。

【「底角」の定義の型】の $\square{\text{ア}}$ に

i) $\angle ABC$ を当てはめた場合

[表現▼] は真なる命題であり、さらに、 $F(A, B, C) = \angle ABC$, $F(C, B, A) = \angle CBA$ であるから、[表現▼] は【図2】で示される主張内容を表現しているといつてよい。

ii) $\angle ACB$ を当てはめた場合

[表現▼] は真なる命題である。

しかし、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ のときは、 $F(A, B, C) = \angle ACB$, $F(A, C, B) = \angle ABC$ となってしまう、 $F(A, B, C)$ と $F(A, C, B)$ の表す角がちょうど $\overline{AB} \sim \overline{AC}$ の場合と入れ替わってしまっている。しかし、角の組自体は i) と変わらないので、[表現▼] は【図2】で示される主張内容を表現しているといえなくもない。

iii) $\angle BAC$ を当てはめた場合

[表現▼] が偽なる命題であることに加え、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ のとき、

$F(A, B, C) = \angle ABC$, $F(A, C, B) = \angle ACB$ でもないから、この場合、[表現▼] は【図2】で示される主張内容を表現したものとはいえない。

以上のことから、筆者は少なくとも次の2点、すなわち、①、②が明らかになったと考える。

【「底角」の定義の型】:

$(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} + \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \square{\text{ア}})$ の

① $\square{\text{ア}}$ に何を当てはめるかによって、[表現▼] は真にも偽にもなり得る。

② $\square{\text{ア}}$ が空欄のままでは [表現▼] の真偽は確定しない。

さらに、次の事実は注目に値する。

9. (2) で述べたように、本来、関数記号の導入についてはあらゆる場合にその記号が表す対象を確定させなくては行けないが、教科書では、2辺が等しい場合以外の「底角」は定めしていない。つまり、【「底角」の定義の型】以外のことは何も決めていないのである。

このことを踏まえれば、筆者は、

「[表現▼] は【図2】で示される主張内容を表現したものといえるか」

に対する判断も【「底角」の定義の型】のままの状態をもとに行う必要があると考える。

そして、この立場に立てば、筆者は次の判断を下すことになる。

二値論理を基礎に置くユークリッド平面幾何学の体系において、「底角」の定義が
 $(\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \angle ABC) \wedge (\overline{AB} \neq \overline{AC} \rightarrow F(A, B, C) = \boxed{\text{ア}})$
 のままでは、
 「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」…… [表現▼]
 は、命題ですらない。したがって、【図2】で示される主張内容を表現したものとは
 いえない。

なぜなら、中学校数学をはじめ、二値論理を基礎におく数学での“命題”にも、次のような、
 <狭義>と<広義>の捉え方があるが、どちらの捉えをしたとしても、「底角」の定義が型の
 ままでは [表現▼] の真偽が定まらないからである。

<狭義>：真偽の定まる叙述のみを命題とする。

<広義>：本論文でいえば、不特定な平面 P の元がはっきり定まるまで、つまり、点の位置が
 確定するまでは真偽の判断はつけられないが、点の位置が確定すれば真偽の定まる
 叙述も命題とする。

11. 結語

筆者は、本論文での考察を通して、『「2つの底角が等しい三角形は、二等辺三角形である」
 という叙述は『二等辺三角形の2つの底角は等しい』という命題の逆の表現と考えてもよいの
 か』という問いに対し、論理的な視点からの根源的な解答を与えることができたと考えてい
 る。その解答とは、二値論理を基礎に置くユークリッド平面幾何学の体系において、「底角」が
 二等辺三角形でない場合にも定義がなされていなければ、「2つの底角が等しい三角形は、二
 等辺三角形である」という叙述は命題にさえなり得ないのだから、逆命題とはいえないとい
 うものであった。

さて、本論文の考察結果を一般化すれば、次のようになるであろう。

「条件つきで定義された用語を含む叙述の中には、命題と呼べないものも存在する。
 それらすべてを命題と呼べるものにするためには、その用語をあらゆる場合にも定義
 しておく、すなわち、“場合分けによる定義”が必要である。」

とはいっても、これはあくまで論理的に厳密な立場からの主張であって、筆者は、常に場合
 分けによる定義をせよと主張したいわけではない。

ただ、児童・生徒が算数・数学を学習していく過程において、“条件つきで定義される用語”
 はいたるところに現れており、さらに筆者の経験では、児童・生徒の中には、この条件つきの
 定義が原因で、必要以上に悩むことに時間を費やしてしまう子がいるのも事実である。子ども
 たちには、枝葉の部分に時間をかけるよりも、幹の部分で大いに考える時間を費やしてもら
 いたい。そのためには、児童・生徒が条件つきの定義に関連して疑問を抱いているときや悩んで
 いるときには、指導者側の適切な配慮・助言が必要であると考ええる。

付録 指導者側の適切な配慮・助言が必要となる指導場面の一例

筆者が考える指導場面の一例として、動点問題を取り上げておく。ここでいう動点問題とは、例えば下の「 」のような場面を設定し、伴って変化する2量 x 、 y の変域を求めたり、これら2量間の関係を考察したりする問題である。

「長方形ABCDがあり、点Pは辺BC上をBからCまで動く。BPの長さが x cmのときの三角形ABPの面積を y cm²とする。」

さてこのような問題で、 y の変域を考えさせると $0 \leq y \leq \square$ であると考ええる生徒と、 $0 < y \leq \square$ であると考ええる生徒がいる。前者は底辺の長さあるいは高さが0の場合でも三角形であると認めようとする生徒の考えであり、後者はそれを認めることに違和感を抱く生徒の考えである。結局これも、3点が共線的となってしまった場合の三角形をどのように定義するのかという“条件付きの定義”が絡んだ対立である。ではこのことについて、現在使用されている7社発行の中学1年生用の教科書²¹⁾ではどのような配慮が見られるのであろうか。調べた結果は以下の通りであった。

type 1: 問題文の中で「ただし、～のとき、 $y = 0$ (y の値は0) とします」と明記している。
[2社²²⁾]

type 2: 問題文には明記していないが、付属の対応表の $x = 0$ のときの y の値の欄に0と記入している。[1社²³⁾]

type 3: 問題文の中で何も触れておらず、付属の対応表等にも記入がない。[3社²⁴⁾]

type 4: 「 x の変域を求めよ」という問題はあるが、「 y の変域を求めよ」という問題やグラフをかかせる問題は出題していない。[1社²⁵⁾]

筆者は、たとえtype 1でない教科書を使用していたとしても、指導する側がtype 1のような配慮を意識的に行う必要があると強く感じる。

謝辞

本論文の作成にあたり、筆者の構想を何度もじっくりとお聴き下さり、また適切なご助言を下さった新田貴士先生（三重大学教授）、わざわざ遠くより私の居住地までお越しになり数学教育者としての論文の書き方をご助言下さいました上垣渉先生（三重大学名誉教授）に厚くお礼を申し上げます。

注

- 1) 島内剛一著『数学の基礎』（日本評論社、昭和55年第1版第4刷）pp.48-49には、「定義には“Cのとき、DはAのことである。”または、“Cのとき、AをDと書く。”などと表現される条件付きの定義もある。これは、証明や定義の中でAとDをまったく同じものとみなすためには、命題Cが成り立っていないと述べている」と述べられている。

- 2) 現在, 中学校数学科用の2年生の教科書(平成27年2月27日検定済み)を発行しているのは次の7社である.

- [A] 学校図書株式会社『中学校 数学2』
 - [B] 株式会社新興出版社啓林館『未来へひろがる 数学2』
 - [C] 教育出版株式会社『中学数学2』
 - [D] 数研出版株式会社『改訂版 中学校数学2』
 - [E] 大日本図書株式会社『新版 数学の世界2』
 - [F] 東京書籍株式会社『新編 新しい数学2』
 - [G] 日本文教出版株式会社『中学数学2』
- (以上, あいうえお順)

以下, この文献からの引用は [A], [B], …, [G] と記す.

- 3) 日本語で表現される語, 語句, 文章などをさす.
4) 次の5社が採用している. [2] 参照

- [A] (p.141, p.144), [B] (p.121, p.124), [D] (p.131, p.135), [E] (p.142, p.144), [G] (p.139, p.142)

ただし正確には, [E] は本文 1. の [表現▽] の叙述に「,」を入れていない.

- 5) ここでは, 中学校・高等学校教員, 大学教員のほか, 学習塾等で数学教育に携わる者をさす.
6) 筆者のこれまでの経験では, 数学教育関係者の中には, 本文の 1. で挙げた〈問い〉を肯定する立場の者も少なからずいた. それは, 独自に「底角」の定義を拡張し, 一般の三角形の場合にもその使用を認めようとする立場, すなわち, 小学校以来, 一般の三角形にも定義されている「底辺」に対し, その両端の角を「底角」と呼ぶことにしようとする立場である.
7) 1899年にD. ヒルベルトにより提唱されたユークリッド平面幾何学の公理系では, 「点」と「直線」と「平面」とは別種のもの集まりとされている [寺阪秀孝・大西正男訳『ヒルベルト 幾何学の基礎, クライン エルランゲン・プログラム』(1994年10月1日初版第8刷発行: 共立出版株式会社) p. 5]. それに対し, R. ハーツホーンは, その著書(難波誠訳)『幾何学I』(2007年10月6日発行: シュプリンガー・ジャパン)において, ユークリッド平面幾何学の公理系を一つの集合の中で設定している. R. ハーツホーンの体系では, 「平面」, 「直線」, 「点」はいずれも無定義の用語であり, 『幾何学I』(p.78)では次のように述べている. 「私たちは単に, 一つの集合を考え, その要素を点とよぶ. またその集合の, ある部分集合を直線とよぶ. 私たちは点とは何であるのか言わず, また直線とはいかなる部分集合がなすのかも言わないが, 単にこれらの無定義な概念がある公理をみただけ, ということを要求するのである」

本論文では, ユークリッド平面幾何学の世界をR. ハーツホーンの立場で捉えるというわけである.

- 8) 例えば, 空集合 ϕ の定義式は次のとおりである. $\forall x (x \notin \phi)$ [x は集合の元]
9) 7) 参照
10) 角については, 「零角」, 「平角」という用語があるように, 3点が共線的である場合も角として認める立場もあるが, R. ハーツホーンはこの立場には立っていない. それは, 厳密な立場でユークリッド平面幾何学を構成しようとするれば, 3点が共線的である場合, 角の頂点の唯一性が成り立たなくなる等の理由によるものである. しかしそこまで厳密にならなくても, 「零角」や「平角」は, 我々が抱く角本来の素朴なイメージからはずれている.
11) 筆者は, 精密には,

$$\forall A \forall B \forall C (\neg (\exists \ell (A \in \ell \wedge B \in \ell \wedge C \in \ell))) \rightarrow (\overline{AB} \sim \overline{AC} \rightarrow \angle ABC \approx \angle ACB)$$

と式化されると考えるが, 本文の 2. で述べたように, 本論文では, 3点A, B, Cは共線的でない, す

なわち、我々の期待通りの $\triangle ABC$ が与えられているという前提に立っているのです、式の前件を含む部分、つまり、

$$\forall A \forall B \forall C (\neg (\exists \ell (A \in \ell \wedge B \in \ell \wedge C \in \ell))) \rightarrow (\quad)$$

は省略している。

- 12) というより、本文 1. の [表現▲] よりも三角形における等しい 2 角の位置がはっきりしているのです、こちらの文章のほうが良いのかもしれない。
- 13) 本文の 2. および 11) 参照
- 14) 与えられた二等辺三角形 ($\overline{AB} \sim \overline{AC}$ である $\triangle ABC$) に対して、一つの底角 (底角 ABC) が確定するので、ここでは関数記号を用いた。
- 15) これと同様な手法は、7) の前掲書 [寺阪秀孝・大西正男訳『ヒルベルト 幾何学の基礎、クライン エルランゲン・プログラム』 pp.15-16] にみられる。三角形における二辺夾角の合同定理の証明で用いられている。
- 16) 本文の 2. および本文の 7. <約束 3> 参照
- 17) 参考文献
 - ① [倉田令二郎著『数学論序説』(昭和47年10月5日初版発行：ダイヤモンド社) pp.152-153]
 - ② [倉田令二郎著『数学概論』(昭和49年8月10日第1刷発行：日本放送出版協会) p.179]
- 18) 参考文献
 - 17) の前掲書② p.180 および
[前原昭二著『記号論理入門』(1967年2月20日第1版第24刷発行：日本評論社) pp.176-177]
- 19) 角という対象に限定する理由は、 $\overline{AB} + \overline{AC}$ の場合にも、 $F(A, B, C)$ を角の中から選んでおかないと、角の同値関係： $F(A, B, C) \approx F(A, C, B)$ に意味を持たせられないからである。
- 20) 15) 参照
- 21) 平成27年2月27日検定済み
- 22) 数研出版株式会社『改訂版 中学校数学 1』 p.138,
東京書籍株式会社『新編 新しい数学 1』 p.138
- 23) 大日本図書株式会社『新版 数学の世界 1』 p.152
- 24) 学校図書株式会社『中学校 数学 1』 p.154,
教育出版株式会社『中学数学 1』 p.159,
日本文教出版株式会社『中学数学 1』 p.159
(なお、日本文教出版株式会社『中学数学 2』 p.86では、本文でいう type 2 となっている。)
- 25) 株式会社新興出版社啓林館『未来へひろがる 数学 1』 p.134

